Memoirs of the Osaka Institute
of Technology
Vol.59, No,1(2014) pp.1~24

# ギリシャ数学における比の合成と交換可能性

# （パッポス数学集成７の用例から）＊

北　秀　和

教務部　教育センター

(2014 年5月31日受理)

# Compounded Ratios and Commutativity in Greek Mathematics (from Examples in Book 7 of Pappus' Collection)

By
Hidekazu KITA
Education Center, Academic Affairs Department

**Abstract**

In the History of Mathematics since Greek mathematics, the following can be confirmed about the commutativity of compound ratios. In principle, it can be positioned in the Elements. Book 7 of the Collections of late Greek mathematics, Pappus uses compounded ratios frequently. In modern times, Descartes treats ratio values algebraically in his Geometry, and his recognition of commutativity of a product of this is approved.

As a result of the research for compounded ratios in Book 7 of the Collection, the following were obtained. First, ex aequali and perturbed proportions are little used with composed ratios in the inference process, almost exclusively. Second, there are no cases in Book 7 where he uses commutativity of compounded ratios explicitly. Nor does he use inference processes where he changes on a whim the order of compounded ratios. Third, there are some evidences that he recognizes that the commutativity is self-evident. That is, in one case, reasoning does not hold if he does not assume it. In another case, he does not fix it even though by doing so it would be possible to avoid the assumption of it. Moreover, "Law and convention of the representation of ratios, rectangulars, cross ratios, and compounded ratios" obtained by the analysis of Book 7 and some of the lemmas Pappus that take it up, make it easy to demonstrate commutativity.

キーワード；パップス数学集成７，等順位による比，乱比例，比の合成 ，合成比の表現，可換性

Keywords; Book 7 of Pappus' Collection, ex aequali, perturbed proportion, compounded ratios, representation of compounded ratios, commutativity

*第 17 回科学史西日本研究大会(日本科学史学会)で発表(2013 年 12 月 14 日，龍谷大学)

## 1．　はじめに

連続量の比，比例論はエウクレイデス(ユークリッド)の原論 [1]第 5 巻に記載がある．その扱いは，今日のものとは大きく異なっている．

1) 比の値という概念なしに比の理論が構成されている．
2) 比の合成(今日でいう比の値の積)の記載はあるが，後の世の挿入だと言われていて，原論の中では活用されていない [2]．

数論も連続量の比例論とほぼ並行した記載が原論第 7 巻にある．数については、積の交換可能性も命題 16 で証明されている．

ギリシャ数学以来, 数学史のなかで, 比の合成(積)の交換可能性について確認できることは,

1) 理論的には, 乱比例を扱う第 5 巻命題 23 を根拠とし [3]，原論 6 巻命題 23 をとおして，比の合成の交換可能性を原論の中に位置付け得ることが確認できる [4]．
2) ギリシャ数学後期(4 世紀前半)に活躍したパッポスの数学集成第 7 巻 [5]では，比の合成が頻繁に登場する．比の合成により比の値の積に相当する処理をしている．そこには，比の値の概念はなく，比の合成の交換可能性をはっきりと認めているものはない．一方，交換可能性を前提とする推論例も存在する．
3) 中世西欧においては、ブラドワディーン，オレームにおいて，デノミナティオ(実質的には比の値)とその「和」「累加」(実質的には積、累乗)が登場する [6][7]．デノミナティオの「和」の可換性の意識的な適用は今のところ確認できない．
4) 近代においては、デカルトの幾何学において，今日と同様に，比の値が登場し，代数的に処理されていて，実質的に比の値の積・交換可能性の適用が認められる [8]．

今回は，2)について報告する．

パッポス数学集成第 7 巻は,「『幾何学的解析と総合』を説明し，・・・それに関連する文献を挙げ，その概要を示し，それらを読むのに必要な一連の補助命題をまとめたものである [9]」．ギリシャ数学の枠内にあって，その正統を引き継ぐのみならず，取り扱われる補助命題の数が多く，当然の結果として比の合成の例も多くある．また，デカルトが幾何学で最初に取り上げた主題 [10]の出典でもあるので，これに焦点を当てた．

なお，この小論において，原論のギリシャ語テクストは、フィッツパトリックのギリシャ語英語対訳版 [11]を，日本語訳は第 1～6 巻では現時点での最新版である「『原論』I~VI 巻」（斎藤憲・三浦伸夫編『エウクレイデス全集第 1 巻』）[12]を，第 7 巻以降では『ユークリッド原論』(中村幸四郎他訳) [13]を用いる．パッポスの数学集成第 7 巻は、ギリシャ語テクストはジョーンズのギリシャ語英語対訳版 [14]を、日本語訳はそれからの筆者の訳を用いる．その際、考察の必要上、点、量等を表現する文字は、ギリシャ語テクストのものにして用いる。

この小論は，2013 年 12 月 14 日龍谷大学において開催された第17回科学史西日本研究大会(日本科学史学会)において口頭発表したものをまとめたものである．

## 2．定義と表記について

### 2.1 比

今日の数学においては,「A:B」とか「A/B」と式で表記し，比の値で定義する比を，ギリシャ数学においては

> 比とは,
> 同種の 2 つの量の大きさに関する
> 何んらかの関係である．
> ( Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν
> ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.)
> (原論第 5 巻定義 3)

と定義し,

> …, 第 1 の Α が第 2 の Β に対して持つ比が,
> 第 3 の Γ が第 4 の Δ に対する比と同じである
> …
> ( Πρῶτον … τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β
> τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγονκαὶ τρίτον τὸ Γ
> πρὸς τέταρτον τὸ Δ,…)
> (原論第 5 巻命題 4)

と文章で表記する．

上記のように，比(λόγος)はある 2 量の関係が別の 2 量の関係と同じであるという意味において用いられ，ある 2 量の関係(比)が単独で登場することはほとんどない．比の値の概念がないことに対応する．

### 2.2 同じ比

ギリシャ数学では，比が同じであることを次のように定義する．

**（原論第 5 巻定義 5）**

4 つの量が,
第1が第2に対し, そして第3が第4に対し,
同じ比にあると言われるのは,
第 1 と第 3 の等多倍が，第 2 と第 4 の等多倍に対して,
それらが何倍であろうとも,
［第 1 と第 3 の等多倍の］各々が
［第 2 と第 4 の等多倍の］各々に対して,
あるいは同時に超過するか,
あるいは同時に等しいか,
あるいは同時に不足するときである.
ただしこれら［の多倍］は
対応する順序でとられるものとする.
([　]は、斎藤による)

今日的に表記すると，2 つの比 A:B と Γ:Δ について，比が同じであるとは,

任意の個数を m，n として,
mA >nB ならば，mΓ >nΔ
mA =nB ならば，mΓ =nΔ
mA <nB ならば，mΓ <nΔ

となることをいう.

そして, ギリシャ数学では, 先ほど示したように,

…, 第 1 の A が第 2 の B に対して持つ比が,
第3の Γ が第4の Δ に対する比と同じである
…
(Πρῶτον … τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β
τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ
πρὸς τέταρτον τὸ Δ,…)
**（原論第 5 巻命題 4）**

と表記したり,

… A が B に対するように,
Γ が Δ に対する.
(ἐστὶν … ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β,
οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.)
**（原論第 5 巻命題 11）**

と表記する.

この小論においては,

A:B =Γ:Δ

と，今日的に表記する.

## 2.3 A，BΓによって囲まれる長方形と AB 上の正方形

ギリシャ数学では,

あらゆる直角平行四辺形は，直角を囲む 2 辺に囲まれると言われる.
(Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον
περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν
ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.)
**（原論第 2 巻定義 1）**

と表現し,

A，BΓによって囲まれる長方形
(τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ
περιεχόμενον ὀρθογώνιον )
**（原論第 2 巻命題 1）**

と表記する.

AB，BΓのように，端点が共通な場合，通常,

AB，BΓによって囲まれる長方形
(τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ
περιεχόμενον ὀρθογώνιον)
**（原論第 2 巻命題 2）**

と表記するが,

矩形 ABΓ
(τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ)
**（原論第 10 巻命題 36）**

と短縮して表記することもある. エウクレイデスの原論では，概ね「長方形 AB，BΓ」であるが，エウクレイデス直後のアルキメデス、アポロニオス以降、短縮形がギリシャの数学者たちによって用いられ [15], ギリシャ数学の後期の大家パッポスの数学集成第 7 巻では，ほとんど,

長方形 ABΓ
(τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ)
**（集成第 7 巻補助命題 68）**

のように短縮形である.

図形としての長方形そのものがなくても，長方形として AB,BΓの積を表現する.

この小論においては，点や長さを示す文字をギリシャ語テクストに忠実に対応させて,

矩形 ZΘ，KΛ
(τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ)
**（原論第 10 巻命題 25）**

なら，r(ZΘ，KΛ)
長方形 AB，BΓ　なら，r(AB，BΓ)
長方形 ABΓ　なら，r(ABΓ)
長方形 ZE，HE
(τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΗΕ)
**（集成第 7 巻補助命題 74）**

なら，r(ZE，HE)
と表記する．
また，正方形については，その 1 辺が AB であるとき，ギリシャ数学では，

AB 上の正方形
(τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ)
（原論第 2 巻命題 2）

と表現，表記する．図形としての正方形そのものがなくても，正方形として平方のことを表現する．

この小論においては，

q(AB)

と表記する．
なお，長方形，正方形ともに，囲んでいる 2 辺を明示しない場合は，対角の 2 頂点によって，

AZ
AE
（原論第 2 巻命題 2）

のように長方形，正方形すら明示せずに表記することも多い．

### 2.4 等順位の比

比の値の概念がないギリシャ数学では，比の合併，分離，転換等の概念が確立し，ついで，今日における比の値の積に相当することを処理するために等順位の比という概念が確立し，その後，乱比例，比の合成という概念が成立したと考えられている．原論の記述がこのことを示している．
等順位の比の定義は原論第 5 巻定義 17 で与えられている．

（原論第 5 巻定義 17）

等順位による比とは，
多数の量と，
それらと個数が等しい別の一連の量があって，
2 つずつとられたときに同じ比にあるとき，
最初の一連の量において
第 1［の量］が最後に対するように，
後の一連の量において
第 1 が最後に対するとき
をいう．
別の言い方をすれば，
中項を除くことによって
両端項をとること
である．
（[　]は、斎藤による）

すなわち，今日的に表記すれば，

A:B =Δ:E
B:Γ =E:Z
のとき，
A:Γ =Δ:Z

というものである．
次の乱比例のことも考慮にいれて，

A:B =Δ:E
B:Γ =E:Z

となっていることを順比例と呼ぶことにすると，上記のことは，

順比例において，等順位の比は同じ

と表現できる．

### 2.5 乱比例における等順位の比

次にあげる比の合成における交換可能性に相当することを，この概念成立以前に担っていたものが乱比例という概念である．
乱比例の定義は原論第 5 巻定義 18 で与えられている．

（原論第 5 巻定義 18）

乱比例とは，
3 つの量と，
それらと個数が等しい別の量があるとき，
まず最初の 3 つの量において
前項が後項に対するように，
後の 3 つの量において
前項が後項に対し，
また最初の 3 つの量において
後項が他のなんらかの［残りの 1 つの］量に対するように，
後の 3 つにおいて
他のなんらかの［残りの 1 つの］量が前項に対するときである．
（[　]は、斎藤による）

この定義を見ただけでは判然としないが，乱比例が具体的に用いられるのは，原論第 5 巻命題 23 である．

3 つの量を A，B，Γ とし，
別の量で，それらと個数が等しく，
2 つずつとられると同じ比にあるものを
Δ，E，Z とし，

またそれらの乱比例が成立し，
まずＡがＢに対するように，ＥがＺに対し，
またＢがΓに対するように，ΔがＥに対するとしよう．
私は言う．
ＡがΓに対するように，ΔがＺに対する．
（原論第 5 巻命題 23）

これから判断すると，今日的に表記すれば，

$A:B = E:Z$
$B:\Gamma = \Delta:E$
のとき，
$A:\Gamma = \Delta:Z$

というものである．

$A:B = E:Z$
$B:\Gamma = \Delta:E$

となっていることを乱比例と言っている．そこで，乱比例における等順位を，

左辺においては先に記述されたものから，
右辺においては後に記述されたものから，
順位を数える

ことにすると，上記のことは

乱比例において，等順位の比は同じ

と表現できる．

**2.6 比の合成**

比の合成の定義は，原論第 6 巻定義 5 で与えられている．なお、この定義は，「ハイベア以来，真正でないことで研究者の意見が一致している」[16]．

（原論第 6 巻定義 5）

比が［複数の］比から合成されると言われるのは，
［複数の］比の大きさがそれら自体に倍加されて何かを作るときである．
（[　]は、斎藤による）

これも，この定義を見ただけでは判然としない．

比の合成という用語が登場するのは原論第 6 巻命題 23 である．

等角な平行四辺形は互いに対して辺［の比］から合成された比をもつ．
（[　]は、斎藤による）
（原論第 6 巻命題 23）

長方形は直角平行四辺形で等角な平行四辺形であるから，

$r(AB,\Gamma\Delta):r(EZ,H\Theta)$は
$AB:EZ$ と$\Gamma\Delta:H\Theta$から合成された比である．

ということである．

この小論では，

$AB:EZ$ と$\Gamma\Delta:H\Theta$から合成された比

を

$(AB:EZ)(\Gamma\Delta:H\Theta)$

と表記することにする．

このように表記すると，

$r(AB,\Gamma\Delta):r(EZ,H\Theta) = (AB:EZ)(\Gamma\Delta:H\Theta)$

となるが，当然のこととして，

$r(AB,\Gamma\Delta):r(EZ,H\Theta) = (\Gamma\Delta:H\Theta)(AB:EZ)$

ともなるのではないかという問題が表面化する．

原論第 6 巻命題 23 のような表記では，このことは明示的ではないが，下に示す第 5 巻命題 23 を根拠として，原論の論理構造からすると，本質的には 2 つの比が同じであることを原論の中に位置づけ得ると筆者は論じたのである[17]．

（原論第 5 巻命題 23）

もし 3 つの量と，
それらと個数の等しい別の量があり，
2 つずつとられると同じ比にあり，
またそれらの乱比例が成立するならば，
等順位においても同じ比にあることになる．

**2.7　数学集成第 7 巻の補助命題**

数学集成第 7 巻の補助命題を参照するに当たっては，その補助命題が扱われている項目番号による．すなわち，補助命題 245 とは，数学集成第 7 巻の第 245 項目で扱われている補助命題という意味である．同一項目で 2 つの補助命題が扱われていることはないが，すべての項目が補助命題を扱っているのではない．補助命題を扱っている項目は，第 43 項目から最後の第 321 項目である．ジョーンズもこの方法により，補助命題 212 において補助命題 205 を参照している．

**2.8　ギリシャ語テクストの複文表記への対応**

ギリシャ語テクストにおいては，今日的には式で表記していることを，文章で表記しており，いわゆる複文も用いられている．これを簡潔に式表記するために，[　]を用いて次のようにした．補助命題 245 から例をあげる．

$AH:HK = q(AH):[r(AHK)$
$\qquad = r(BH\Gamma)]$,

は，[　　]を含む式において，[　　]内の前半を用

いた式，すなわち，

AH:HK =q(AH):r(AHK)

が成立し，[　　]内の式，すなわち，

r(AHK) =r(BHΓ)

が成立するので，[　　]内の後半を用いた式，すなわち，

AH:HK =q(AH):r(BHΓ)

が成立するという意味である．

## ３．パッポスの数学集成第７巻における等順位の比・乱比例における等順位の比と比の合成

### 3.1　等順位の比・乱比例と比の合成との，論証における排他性・代替性

数学集成第 7 巻において扱われる補助命題は全部で 279 あり，順比例における等順位の比，乱比例における等順位の比，比の合成を活用する補助命題は，全部で 30 ある．(附表 1 参照)

内訳は，順に 12，2，18 である．

一つの補助命題の中で等順位の比と比の合成の両方を用いるものが 2 つあるが，そのうち補助命題 272 は，比の合成を用いると明白であるとして，比の合成を用いない場合の論証を主におこなっている．よって，一貫した論証において等順位の比と比の合成をともに用いているのは補助命題 212 だけであり，これについては別途論じることにする．

したがって，1 つを除いて，その他のすべての補助命題は，順比例での等順位の比・乱比例での等順位の比と比の合成とのいずれかを用いて論証している．すなわち，排他的なのである．中には，「比の合成を用いずに（補助命題 256)」とか，「比の合成によると（補助命題 84)」とかのコメントを補助命題の先頭に記載してあるものもある．すなわち，代替的なのである．

### 3.2 比の合成に焦点を当てて

数学集成第 7 巻おいて，比の合成は次のように表現されている．比の合成が最初に登場する補助命題 68 にある例である．

　AB のΓE に対する比と BΓの AE に対する比の合成は，

　BΔのΔΓに対する比とΓΔの EΔに対する比の合成と同じである．

ὥστε καὶ
ὁ συνημμένος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν
ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς ΓΕ καὶ ἐξ οὗ
ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΑΕ ὁ αὐτός ἐστιν
τῶι ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ
ΒΔ πρὸς ΔΓ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΔ.

（集成第 7 巻補助命題 68）

この直前に，

　AB のΓE に対する比は BΔのΔΓに対する比と同じである．

　一方，BΓの EA に対する比はΓΔのΔE に対する比と同じである．

とあって，先程の表現に続くのである．

この小論では，以下，比の合成の交換可能性について，ギリシャ数学がどう意識していたかを論じることを目的として，点等を示すギリシャ文字の順を忠実に再現し，表記だけを今日的に改める．その際，A：B＝Γ：Δと表現したとき，A：B を左辺，Γ：Δを右辺と表現するが，左辺は，ギリシャ語テクストで先に記述された比のことであり，右辺とは後に記述された比のことをいう．また，BΔ:ΔΓのように，点Δを内側においていると表現したとき，ギリシャ語テクストでは，BΔのΔΓに対する比というように，BΔ，ΔΓの順に共通の端点が続くように表示されていることをいう．

すると，上記のことは，

AB:ΓE =BΔ:ΔΓ　　　　　　　7

一方，

BΓ:EA =ΓΔ:ΔE　　　　　　　8

そこで，

(AB:ΓE)(BΓ:AE)

=(BΔ:ΔΓ)(ΓΔ:EΔ)　　　　　9

となり，補助命題 68 をさらに続けると，

一方，

(AB:ΓE)(BΓ:AE)

=r(ABΓ):r(AEΓ)　　　　　　10

ところが，

(BΔ:ΔΓ)(ΓΔ:ΔE)

=BΔ:ΔE　　　　　　　　　　11

よって，

BΔ:ΔE

=r(ABΓ):r(AEΓ)　　　　　　12

となっている．なお，行末の番号は，ジョーンズの

ギリシャ語英語対訳版の英訳ページに振ってあるものである．

9 の比の合成の表記

(AB:ΓE)(BΓ:AE)

=(BΔ:ΔΓ)(ΓΔ:EΔ)　9

を見ると，合成の順は，左辺も右辺も 7，8 の順になっており，この順に混乱は見られない．

10 では，

(AB:ΓE)(BΓ:AE)

=r(ABΓ):r(AEΓ)　10

と，比の合成を長方形の比に直しているが，これを保証する命題が，「2.6 比の合成」で取り上げた原論第 6 巻命題 23 である．

10 において，左辺の比の合成順と右辺の長方形を囲む線分の順とを見ると，右辺の前項においては，長方形を囲むものがＡＢ，ＢΓとなり合成順と一致するが，後項においては，長方形を囲むものがＡＥ，ＥΓとなり合成順と逆になっている．この点については，長方形の表記の例と併せて次項 3.3 で検討する．

### 3.3 比，長方形，複比，比の合成の表記の法則性，慣例

今回検討したパッポス数学集成第 7 巻における 30 の補助命題の範囲で，比，長方形，比の合成＝長方形の比となる式，複比の 4 つの表記について，(2)にあげた補助命題 68 を具体例にして，ここにまとめておく．（附表 1 参照）

（1）比の表記

大半は 7 の BΔ：ΔΓのように同じ点を内側に置いている．しかし，9 の後のように同一の比である 8 や 11 ではΓΔ：ΔE となっているものがΓΔ:EΔとなっていることがある．

今回検討した範囲では，比の前項と後項に同じ点を含む 295 箇所中，274 箇所(92.9%)が同じ点を内側に表記し，21 箇所(7.1%)が同じ点を内側に表記していない．よって，同じ点を内側に置くことが，蓋然的に法則と判断でき，以下これを「比表記の慣例」とよぶ．

（2）長方形の表記

大半は 10 の r(ABΓ)のように同じ点を内側に置いている．内側に置くといっても数学集成では，補助命題 74 の 9 の 1 か所だけが r(ΓΔ，ΔE)となっていて，それ以外は r(ABΓ)のようになっている．これも含めて，内側に置くということにする．しかし，補助命題 74 の 7 では r(ZE，HE)，9 では r(BΓ，ＢＥ)となっている．

今回検討した範囲では，囲む線分の前項と後項に同じ点を含む 171 箇所中，169 箇所(98.8%)が同じ点を内側に表記し，上にあげた 2 箇所(1.2%)のみが同じ点を内側に表記していない．r(ABΓ)のようにならないものがすべて，ギリシャ語テクストに誤記のある補助命題 74 に集中している．さらに上記 3 箇所中 2 箇所はコマンディーノが誤記と指摘する 9 のところである [18]．よって，同じ点を内側に置くことが，ほとんど例外のない法則と判断できる．しかし，「(1) 比の表記」の「比表記の慣例」に合わせて，以下これを「長方形表記の慣例」とよぶ．

（3）比の合成＝長方形の比となる式における表記

例えば，

(AB:ΓE)(BΓ:AE) =r(ABΓ):r(AEΓ)　10

においては，合成の順が長方形の線分の順になっていない．補助命題 74 の

(ΓA:ZE)(ΓA:HE) =q(ΓA):r(ZE,HE)　7

では合成の順が長方形の線分の順と完全に一致している．

今回検討した範囲では，比の合成がそのまま長方形の比となるもの 16 箇所中，9 箇所(56.2%)は合成の順と長方形の線分の順が完全に一致している．どこかが一致していないものは 7 箇所(43.7%)である．その内訳は，(AB:ΓE)(BΓ:AE) =r(ABΓ):r(AEΓ)のタイプが 4 箇所(25.0%)，(AB:ΓE)(BΓ:AE) =r(ΓBA):r(AEΓ)のタイプが 2 箇所(12.5%)，(AB:ΓE)(BΓ:AE) =r(ΓBA):r(ΓEA)のタイプが 1 箇所(6.3%)となっている．合成の順と長方形の線分の順が完全に一致しているものが過半数ではあるが，比の表記，長方形の表記と比べると，差は歴然としている．あえて言えば，前項の長方形の線分の順が合成の順と一致しているものが 13 箇所(81.2%)であることである．よって，蓋然的に法則と判断できるものはない．

（4）複比の表記

補助命題 196 では，

r(EΘ,HZ):r(EZ,HΘ)

=r(ΘB,ΓΔ):r(ΘΔ,BΓ)　13

となっていて，左辺では，前項，後項ともに，長方

形の前の線分が E で始まり，後の線分が H で始まっている．右辺では，前項，後項ともに，長方形の前の線分はΘで始まっているが，後の線分の共通端点Γは，前項では前，後項では後となっている．

今回検討した範囲では，複比 30 箇所中，
r(EΘ,HZ):r(EZ,HΘ)のタイプが 8 箇所(26.7%)，
r(EΘ,ZH):r(EZ,ΘH)のタイプが 5 箇所(16.7%)，
r(EΘ,HZ):r(EZ,ΘH)のタイプが 5 箇所(16.7%)，
r(EΘ,ZH):r(EZ,HΘ)のタイプが 9 箇所(30.0%)，
r(EΘ,HZ):r(ZE,ΘH)のタイプが 3 箇所(10.0%)
となっており，特に典型的なものすらなく，あえて言えば，前項，後項ともに前の線分の始まりが同じ点であるものが 29 箇所(90.6%)であることである．よって，蓋然的に法則と判断できるものはない．

「(3) 比の合成＝長方形の比となる式の表記」，「(4) 複比の表記」の分析から，長方形の表記を比の合成と関連させてみた場合，論証の進行に合わせて都合の良いように長方形の線分の順序をとっていると言えよう．以下，これを「比の合成，複比における長方形の線分順の慣例」とよぶ．

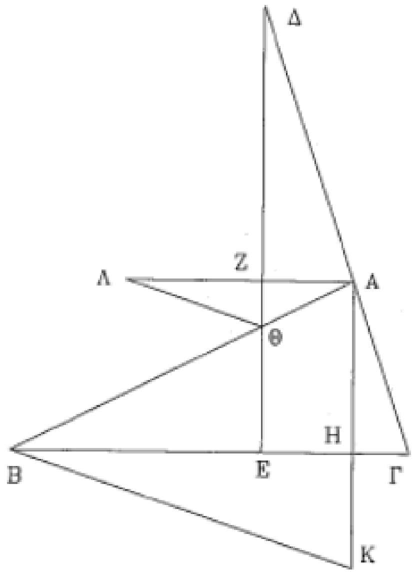
### 3.4 パッポスにおける乱比例と比の合成の交換可能性

「2.5 乱比例と等順位の比」の冒頭に「比の合成における交換可能性に相当することを，比の合成における交換可能性の概念成立以前に担っていたものが乱比例という概念である.」と端的に指摘したが, パッポスの数学集成第 7 巻の補助命題 245, 246 によりこの要点を述べる．(附表 2 参照)

なお、以下、三角形 ABΓを t(ABΓ)，角 ABΓを a(ABΓ)と略記する。また、{ }は筆者の補足を示す．

補助命題 245 では乱比例における等順序の比を用いて証明し，246 では比の合成を用いて証明している．次がその補助命題である．

**(集成第 7 巻補助命題 245，246)**




t(ABΓ)において，
ΓA を延長して任意の直線ΔE を他の辺と交わるように引き，
AH をそれと平行に引き，
AZ を BΓと平行に引く．
このとき，
q(AH):r(BHΓ)=r(ΔZΘ):q(ZA)
となる．

補助命題 246 では証明に比の合成を用いて次のように証明している．

**(集成第 7 巻補助命題 246)**

| | |
|---|---|
| AH:HB =ΘE:EB | 1 |
| により， | |
| 　=ΘZ:ZA | 2 |
| 一方， | |
| AH:HΓ =ΔE:EΓ | 3 |
| により， | |
| 　=ΔZ:ZA | 4 |
| よって， | |
| [(AH:HB)(AH:HΓ) | |
| 　=q(AH):r(BHΓ)] | [4'] |
| 　=(ΘZ:ZA)(ΔZ:ZA) | 5 |
| 　=r(ΔZΘ):q(ZA) | 6 |

この推論では，相似によって，

| | |
|---|---|
| AH:HB =ΘZ:ZA | 1' |
| AH:HΓ =ΔZ:ZA | 3 |

比の合成により，

(AH:HB)(AH:HΓ) =q(AH):r(BHΓ) 4’

(ΘZ:ZA)(ΔZ:ZA) =r(ΔZΘ):q(ZA) 6

と一気に証明すべき両辺を作り，

q(AH):r(BHΓ) =r(ΔZΘ):q(ZA)

を得ている．合成の順がどうであろうと，3.3 の「比の合成，複比における長方形の線分順の慣例」により，証明すべき式に至るので，交換可能性は表面化しない．

これに対して，補助命題 245 では証明に乱比例における等順位の比を用いて次のように証明している．

**（集成第 7 巻補助命題 245）**

{AH の延長上に K をとり，}

r(AHK) =r(BHΓ)

とし， 1

{AZ の延長上にΛをとり，}

r(AZΛ) =r(ΔZΘ)

とし， 3

B と K， Θ とΛを結ぶ．

すると，

a(Γ) =a(BKH), 2

a(ΔAΛ) =a(ZΘΛ)

が円周角により成立する． 4

よって，

a(HKB) =a(ZΘΛ). 5

ところが，

a(H) =a(Z). 6

よって，

{t(BHK)∽t(ΛZΘ)

となり，}

BH:HK =ΛZ:ZΘ. 7

一方，

AH:HB =ΘE:EB, 8

ところが，{BΓ，AZ が}平行となるので，

ΘE:EB =ZΘ:ZA 9

よって，

AH:HB =ΘZ:ZA. 10

以上により，

AH:HB =ΘZ:ZA, 10’

また，

BH:HK =ΛZ:ZΘ, 11

となり，乱比例における等順位の比により，

AH:HK =ΛZ:ZA. 12

一方，

AH:HK =q(AH):[r(AHK) [13

=r(BHΓ)], 14]

ところが

ΛZ:ZA =[r(ΛZA) =r(ΔZΘ)] 16

:q(AZ). 15

したがって，

q(AH):r(BHΓ) =r(ΔZΘ):q(ZA). 17

この推論では，

AH:HB =ΘZ:ZA 10

BH:HK =ΛZ:ZΘ 11

から，

AH:HK =ΛZ:ZA 12

を導くには，乱比例における等順位の比を避けることができない．

比の合成をこの部分に用いると，次のようになろう．

(AH:HB)(BH:HK) =(ΘZ:ZA)(ΛZ:ZΘ)

ところが，

(AH:HB)(BH:HK) =AH:HK

一方，

比の合成の交換可能性により，

(ΘZ:ZA)(ΛZ:ZΘ) =(ΛZ:ZΘ)(ΘZ:ZA)

=ΛZ:ZA

よって，

AH:HK =ΛZ:ZA

確かに，比の合成における交換可能性に相当することを，比の合成における交換可能性の概念成立以前には乱比例という概念が担っていたのである

## 4． 比の合成の順を示す表現「共通に付加」

数学集成第 7 巻補助命題 212 には，他の補助命題にみられない注目すべき表現が 2 つある．その 1 つが

共通に付加する

(κοινὸς ἄρα προσκείσθω)

という表現である．

補助命題 212 は以下のとおりである．なお，ギリシャ語テクストの 7，8 の誤記は，ここではシムソンの訂正により正してある [19]．（附表 2 参照）

**（集成第 7 巻補助命題 212）**

{図において}

t(ABΓ)があり，

AΔ を BΓに平行に引き，

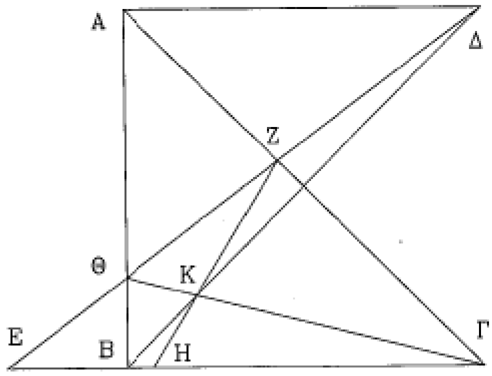
ΔE，ZH を｛t(ABΓ)の 2 辺と｝交わるように引く．

そして，

q(EB):r(EΓB)=BH:HΓ

とする．

もし，BΔが結ばれたら，Θ，K，Γは一直線上にある．




｛というのは｝

q(EB):r(EΓB)

=BH:HΓ 1

なので，これに

次を共通に付加しよう， 1'

[ΓE:EB

=r(EΓB):r(EBΓ)]. [2]

すると，等順位の比により，

[q(EB):r(EBΓ)

=EB:BΓ], [2']

=(BH:HΓ)([r(EΓB):r(EBΓ) [3

=EΓ:EB]). 4]

したがって，

q(EB):r(EBΓ)

=(BH:HΓ)(EΓ:EB) 5

=r(EΓ,BH):r(EB,ΓH). 6

一方，以前の補助命題(205)により，

EB:BΓ

=r(ΔZ,ΘE):r(ΔE,ZΘ). 7

よって，

r(ΓE,BH):r(ΓH,EB)

=r(ΔZ,ΘE):r(ΔE,ZΘ). 8

したがって，

Θ，K，Γは一直線上にある． 9

この例から，

q(EB):r(EΓB)と r(EΓB):r(EBΓ)との比の合成は，

q(EB):r(EΓB)に r(EΓB):r(EBΓ)を付加すること

であって，比の式における比の合成は，元の式

q(EB):r(EΓB)

=BH:HΓ 1

に，

比 r(EΓB):r(EBΓ)を共通に付加すること

とギリシャの数学者たちは意識していたと判断できる．

## 5． 等順位の比

「4　比の合成の順を示す表現『共通に付加』」の例にあげた補助命題 212 において, 注目すべき表現がもう 1 つある．

等順位の比により

(δι᾽ ἴσου ἄρα)

という表現である．この補助命題が，一貫した論証において「等順位の比」という用語と比の合成とをともに用いている唯一のものである．(附表 2 参照)

まず，等順位の比の典型例を挙げておく．

数学集成第 7 巻においては, 補助命題 196 にある

EZ：ZA=EΘ：ΘΛ 3

ところが，

AZ：ZH=ΘΛ：ΘM 5

そこで，等順位の比により

EZ：AH=EΘ：ΘM 6

**(集成第 7 巻補助命題 196)**

というものである．

原論においては，等順位は第 5 巻命題 20 以降，命題 22 を経て，命題 24，原論第 6 巻，10 巻，12 巻においてしばしば活用される．それに対して比の合成は第 6 巻命題 23 以外に活用された用例がなかった．一方，比の合成はアルキメデス，アポロニオスなどエウクレイデス以降のギリシャ数学において，比例論の基本的ツールとして頻繁に利用される[20]．そこから，等順位の比よりも遅れて比の合成の概念が確立したと考えられることはすでに触れたが，両者の関係をギリシャの数学者たちがどうとらえていたかが注目される．

等順位の比と比の合成とを同じものと意識していたかどうかという観点から，命題 212 の論理の流れを見やすく補足して再掲する．

q(EB):r(EΓB)

=BH:HΓ 1

これに，

r(EΓB):r(EBΓ)
=ΓE:EB　2#
を共通に付加すると，
{(q(EB):r(EΓB))(r(EΓB):r(EBΓ))
=(BH:HΓ)(r(EΓB):r(EBΓ))}　{2'}
すると，{左辺は} 等順位により，
q(EB):r(EΓB)
{となり，右辺は}
=(BH:HΓ)(r(EΓB):r(EBΓ))　3#
{となるが，右辺の合成の後因子は}
r(EΓB):r(EBΓ)=EΓ:EB.　4#
したがって，
q(EB):r(EBΓ)
=(BH:HΓ)(EΓ:EB)　5
=r(EΓ,BH):r(EB,ΓH)　6

**(集成第 7 巻補助命題 212)**

数学集成第 7 巻では明示されていないが，比の合成として成立した式，

{(q(EB):r(EΓB))(r(EΓB):r(EBΓ))
=(BH:HΓ)(r(ΓB):r(EBΓ))}　{2'}

において，その左辺については等順位の比として，右辺については比の合成として，処理し，

q(EB):r(EBΓ)
=(BH:HΓ)(r(EΓB):r(EBΓ))　3#
=(BH:HΓ)(EΓ:EB)　5
=r(EΓ,BH):r(EB,ΓH)　6

としている．即ち，等順位の比という概念を用いて，比の合成の定義(原論第 6 巻命題 23)を運用している．

これとまったく同じ論理構造を持つものが補助命題 240 である．

Γ:Δ =(Γ:H)(H:Δ)　6
であり，一方
Γ:H =A:B　6'
であり，また逆転比により
H:Δ =Z:E　7
であるから，
Γ:Δ =(A:B)(Z:E)　8

**(集成第 7 巻補助命題 240)**

等順位の比という用語を用いず，6 で比の合成として表記し，7 を用いて 8 を導いている．

この補助命題 212，240 から，ギリシャの数学者たちは，実際の運用においては，等順位の比ということと比の合成とを同じものとして見ていたのではないか，記述にあたって，等順位の比という概念で済ませられるものはそれで済ませ，比の合成によるなら一貫してそれを用いようとしていたのではないかと判断できる．

## ６．論証における比の合成の出現の仕方と合成の順

### 6.1 共通に付加

その 1 つ目は，既に 4 で検討した「共通に付加」である．この例では，付加される比が比の合成の後の因子になっている．

### 6.2 2 つの比の式から比の合成へ

2 つ目は，2 つの比の式から両辺をそれぞれ合成して，合成された比の式を作るものである．既に 2 で検討した補助命題 68 の例が最も基本的なものである．しかし，先行する 2 つの比の式の両辺を，それぞれその順に合成しない例もある．

補助命題 77 では，以下のように論証が進む．

BE:AΓ =EΔ:ΔΓ　4
しかし，また，
BΔ:ΔE =AB:ΓE　4'
ここで，
[(BΔ:ΔE)(EΔ:ΔΓ) =BΔ:ΔΓ]　[6]
=(AB:ΓE)(EB:AΓ)　5

**(集成第 7 巻補助命題 77)**

後から登場した比の式 4'に，先に登場した比の式 4 の左辺と右辺を入れ替えて合成している．その意図は明白で，次の式 6 が示すように，合成した比の式の左辺を，原論 6 巻命題 23 の証明における実質的な比の合成の定義により処理するためである．それは，比の合成の順を，その後の目標とするものに見合うように意識的に変更しているということを意味している．

### 6.3 長方形の比から比の合成へ

3 つ目は，長方形の比を比の合成に分解することである．

補助命題 198 では，原論第 6 巻命題 23 による，次の例が登場する．

r(AB,ΓZ):r(AΔ,EZ) =(BA:AΔ)(ΓZ:ZE)　6

**(集成第 7 巻補助命題 198)**

この式の右辺における合成の順は，左辺の比をなす長方形を囲むそれぞれの線分を用いて，その順のとおりに合成する比を構成し，合成している．その際，AB を BA と書き換えるのは，「比表記の慣例」

による．

補助命題 197 では，合成の順が左辺の比の順に制約されない次の例がある．

$r(\Theta E,HZ):r(\Theta H,ZE) = (\Theta E:EZ)(ZH:H\Theta)$ 1

（集成第 7 巻補助命題 197）

補助命題 198 の例にしたがえば，$(E\Theta:\Theta H)(HZ:ZE)$となるところである．この左辺は，ギリシャ数学でよく活用される複比で，この複比にしたいなら最初から $r(E\Theta,HZ):r(EZ,\Theta H)$としておけばよいではないかという議論もでてこようが，パッポスは上記のように表記している．右辺は右辺で後の証明の流れにとっては，この順に，この比が収まってもらわないと困る．以下の論証は次のように進行する．

$\Theta E:EZ = \Theta\Lambda:ZA$ 2

一方，

$ZH:H\Theta = ZA:\Theta K$ 3

よって，

$r(\Theta E,HZ):r(\Theta H,EZ) = (\Theta\Lambda:ZA)(ZA:\Theta K)$ 4

ところが，

$(\Theta\Lambda:ZA)(ZA:\Theta K) = \Theta\Lambda:\Theta K$ 5

ここから，

$r(\Theta E,HZ):r(\Theta H,ZE) = \Theta\Lambda:\Theta K$ 6

6 はこの補助命題の結論を導くための結節点で，中間目標となるものである．その 6 に向けて論証が進むのである．6 の左辺が 1 の左辺で，6 の右辺が 5 の右辺であることを見れば，1 の分解はこれ以外にありえない．

### 6.4 線分の比から比の合成へ

4 つ目は，線分の比を比の合成に分解することである．

補助命題 194 では，原論，数学集成に直接的な根拠をもたない命題(メネラオスの定理)[21] による結果として次の 2 つの式が登場する．

$A\Delta:\Delta Z = (AB:BE)(EK:KZ)$ 4

$A\Gamma:\Gamma H = (AB:BE)(E\Theta:\Theta H)$ 5

（集成第 7 巻補助命題 194）

これらの式における合成の順は，メネラオスの定理に規定されている．

補助命題 210 では，比の合成の定義(原論第 6 巻命題 23)によって比の合成に分解している例が 2 つ登場する．

$KH:B\Delta = (KH:B\Theta)(B\Theta:B\Delta)$ 8

$\Delta\Gamma:\Gamma\Theta = (\Delta\Gamma:H\Lambda)(H\Lambda:\Theta\Gamma)$ 11

（集成第 7 巻補助命題 210）

これらの式における合成の順は，左辺に規定されている．

補助命題 198 では，比の合成の定義(原論第 6 巻命題 23)によって 3 つの比の合成に分解している例が登場する．

$B\Gamma:\Delta E$

$= (B\Gamma:KN)(KN:KM)(KM:\Delta E)$ 5

（集成第 7 巻補助命題 198）

この式における合成の順も，左辺に規定されている．

### 6.5 合成の順

以上 4 つの場合に分類して，比の合成の順を検討したが，合成の順は，その後の論証の過程を見越して，前以て都合のよい順に並べておくことができる場合が多い．とはいっても，論証を進める上での試行錯誤は数限り無く繰り返されるから，合成の順の交換可能性は必然的に認識されていたと考えられる．

しかし，「6.4 線分の比から比の合成へ」の例では，そうはいかない．分解の順は制約を受けている．その順を変更することは，合成の順の交換可能性を意識的に活用する以外にない．

## 7．　比の合成の処理の仕方

### 7.1 比の合成から線分の比へ

一つめは，最も単純な例で，比の合成を，比の合成の定義(原論第 6 巻命題 23)により，線分の比に変換するものである．

ここでは，補助命題 84 の 6 を取り上げる．

$(AB:B\Gamma)(\Gamma B:BE) = AB:BE$ 6

（集成第 7 巻補助命題 84）

論証の前後の流れをポイントだけ示すと，次のようになっている．

$A\Delta:\Gamma E = AB:B\Gamma.$ 2

$A\Gamma:\Delta E = \Gamma B:BE.$ 4

ここで，

$[(AB:B\Gamma)(\Gamma B:BE) = AB:BE],$ [6]

$=[(A\Delta:\Gamma E)(A\Gamma:\Delta E),$ [5

$=r(\Delta A\Gamma):r(\Gamma E\Delta)].$ 7]

｛したがって

$AB:BE = r(\Delta A\Gamma):r(\Gamma E\Delta).$｝ ｛7'｝

となる．6 の左辺の合成順はこの順でなければ，比の合成の定義(原論第 6 巻命題 23)を活用できない．

### 7.2 比の合成から長方形の比へ

2つ目は比の合成を, 原論第6巻命題23により, 長方形の比に変換するものである.

最も典型的な例は，補助命題74の

$(\Gamma A:ZE)(\Gamma A:HE) = q(\Gamma A):r(ZE,HE)$　7

$(\Gamma B:BE)(\Gamma\Delta:\Delta E) = r(B\Gamma,\Gamma\Delta):r(BE,\Delta E)$　9

（集成第7巻補助命題74）

である. 比の合成の順に長方形の比に変換されている．合成の順についても検討するために，前後の論証の過程を示す．なお，ギリシャ語テクストの 9, 10 の誤記は，ここではコマンディーノの訂正により正してある[22].

$A\Gamma:ZE = \Gamma B:BE,$　4

一方,

$\Gamma A:HE = \Gamma\Delta:\Delta E,$　5

よって,

$(\Gamma A:ZE)(\Gamma A:HE)$

$= (\Gamma B:BE)(\Gamma\Delta:\Delta E).$　6

ところが,

$(\Gamma A:ZE)(\Gamma A:HE) = q(\Gamma A):[r(ZE,HE),$　[7

$= q(AE)],$　8]

一方,

$(\Gamma B:BE)(\Gamma\Delta:\Delta E)$

$= r(B\Gamma,\Gamma\Delta):r(BE,\Delta E).$　9

ここから,

$r(B\Gamma\Delta):r(BE\Delta) = q(\Gamma A):q(AE).$　10

目標となる 10 の結論にいたる論証を見通したうえで，比の合成の順は自然に収まっている．

次にあげる補助命題75では，様子が異なる．

$(\Gamma E:E\Delta)(\Gamma B:B\Delta)$

$= r(B\Gamma E):r(B\Delta E)$　7

（集成第7巻補助命題75）

左辺の比の合成の順と右辺の長方形を囲む線分の順が逆になっている. 合成の順についても検討するために，前後の論証の過程を示すと,

$r(Z\Delta H) = q(\Delta A).$　4

よって,

$q(\Gamma A):q(A\Delta) = q(\Gamma A):r(Z\Delta H).$　5

ところが,

$q(\Gamma A):r(Z\Delta H)$

$= ([\Gamma A:\Delta H) = \Gamma E:E\Delta,])$　[5']

$([\Gamma A:Z\Delta) = \Gamma B:B\Delta,]).$　[5"]6

ところが,

$(\Gamma E:E\Delta)(\Gamma B:B\Delta)$

$= r(B\Gamma E):r(B\Delta E).$　7

ここから,

$r(B\Gamma E):r(B\Delta E) = q(\Gamma A):q(A\Delta).$　8

となっている．論証過程をよく見れば，6の長方形を比の合成に分解するところで逆順となっており，7でまた逆順となっているので，結論を見越して合成の順を試行錯誤した過程を校正し忘れたというところではなかろうか.

### 7.3 共通に消去

3 つ目は両辺の比の合成から同一の比（同じ比）を

共通に消去する

（κοινὸς ἐκκεκρούσθω）

という処理である．最も素直な例は補助命題 194 にある.

$(AB:BE)(EK:KZ)$

$= (AB:BE)(E\Theta:\Theta H),$　6

そして,

AB:BE を共通に消去する.

すると,

$EK:KZ = E\Theta:\Theta H$　7

（集成第7巻補助命題194）

6 の両辺の比の合成から共通する AB:BE を消去して，7 を得ている．消去する AB:BE は，両辺とも比の合成の前の因子である.

原論においても，数学集成第7巻においても，この消去を根拠づける補助命題はない．しかし，補助命題 194 の後に登場する補助命題 240 により根拠づけることができる.

補助命題240

$A:B = (\Gamma:\Delta)(E:Z)$

ならば

$\Gamma:\Delta = (A:B)(Z:E)$

（集成第7巻補助命題240）

補助命題210には消去する因子が, 左辺と右辺で前後異なる例がある.

$(KH:B\Theta)(\Delta\Gamma:H\Lambda)$

$= (\Delta\Gamma:H\Lambda)(H\Lambda:\Theta\Gamma).$　11

そして再び,

$\Delta\Gamma:H\Lambda$ を共通に消去する.

すると,

$KH:B\Theta = H\Lambda:\Theta\Gamma$　12

（集成第7巻補助命題210）

11 の両辺の比の合成において，共通する $\Delta\Gamma:H\Lambda$ は，左辺では後の因子，右辺では前の因子となっ

ている．比の合成の交換可能性を否定すれば，この消去は成立しない．パッポスの数学集成第 7 巻においては，比の合成において共通なものを消去できることを保証する補助命題はなかった．

では，この困難さを見越して，そもそも比の合成の順が逆になるように，論理の構成を組み替えることができなかったのかという疑問に突き当たる．これに答えようとその前を見ると，実はこの直前に，もう一つ共通なものを消去する例がある．これは両辺で因子の数が異なるものである．

(KH:BΘ)(BΘ:BΔ)(ΔΓ:HΛ)
=(BΘ:BΔ)(ΔΓ:ΓΘ). 9
BΘ:BΔを共通に消去する．
すると，
(KH:BΘ)(ΔΓ:HΛ) =ΔΓ:ΓΘ, 10

9 の左辺は 3 因子，右辺は 2 因子からなる．しかも，共通する因子 BΘ:BΔは，左辺では中央に，右辺では前にある．先程の疑問は，この左辺の BΘ:BΔという因子を先頭か最後かにすることができなかったかということになる．そこで，この直前の論証過程を取り上げてみる．

r(EH,ZΔ):r(ΔE,HZ)
=r(BΘ,ΓΔ):r(BΔ,ΓΘ), 2
一方，
r(EH,ZΔ):r(ΔE,HZ)
=( [HE:EΔ=KH:BΔ,]) [4]
([ ΔZ:ZH=ΔΓ:HΛ]), [5]3
そして，
r(BΘ,ΓΔ):r(BΔ,ΓΘ) =(ΘB:BΔ)(ΔΓ:ΓΘ), 6
よって，
(KH:BΔ)(ΔΓ:HΛ) =(BΘ:BΔ)(ΔΓ:ΓΘ). 7
ところが，
KH:BΔ =(KH:BΘ)(BΘ:BΔ). 8

これに，先ほど取り上げた論証が続く．

よって，
(KH:BΘ)(BΘ:BΔ)(ΔΓ:HΛ)
=(BΘ:BΔ)(ΔΓ:ΓΘ). 9
ΘB:BΔを共通に消去すると，
(KH:BΘ)(ΔΓ:HΛ) =ΔΓ:ΓΘ, 10
=(ΔΓ:HΛ)(HΛ:ΘΓ). 11
そして再度
ΔΓ:HΛを共通に消去すると，
KH:BΘ =HΛ:ΘΓ. 12

8 の比の合成の順はこれ以外にない．7 の両辺の比の合成が順を逆にできないかということになる．7 の右辺は 6 の右辺である．6 は長方形の比を比の合成に変換しているだけだから，原理的に可能である．7 の左辺は 3 の右辺で，3 も長方形の比を比の合成に変換しているだけだから，原理的に可能である．すなわち，「比の合成，複比における長方形の線分順の慣例」による．したがって，スマートさに幾分難点があるが，次のように修正すれば，論証の流れは随分とよくなる．

r(EH,ZΔ):r(ΔE,HZ)
=r(BΘ,ΓΔ):r(BΔ,ΓΘ), 2
一方，
r(EH,ZΔ):r(ΔE,HZ)
=([ΔZ:ZH =ΔΓ:HΛ,]) [5]
([HE:EΔ =KH:BΔ]), [4],3#
そして
r(BΘ,ΓΔ):r(BΔ,ΓΘ) =(ΔΓ:ΓΘ)(ΘB:BΔ), 6#
よって，
(ΔΓ:HΛ)(KH:BΔ) =(ΔΓ:ΓΘ)(ΘB:BΔ). 7#
ところが，
KH:BΔ =(KH:BΘ)(BΘ:BΔ). 8
よって，
(ΔΓ:HΛ)(KH:BΘ)(BΘ:BΔ)
=(ΔΓ:ΓΘ)(BΘ:BΔ). 9#
ΘB:BΔを共通に消去すると，
(ΔΓ:HΛ)(KH:BΘ) =ΔΓ:ΓΘ 10#
=(ΔΓ:HΛ)(HΛ:ΘΓ). 11
そして再度，
ΔΓ:HΛを共通に消去すると，
KH:BΘ =HΛ:ΘΓ. 12

これについても，前節「7.2 比の合成から長方形の比へ」の最後にコメントしたこと，「比の合成，複比における長方形の線分順の慣例」が当てはまる．

では，最後にもう一つの例を上げる．補助命題 198 にあるものである．

論証がかなり錯綜しているので，要約してポイントを示す．補助命題 210 の例と同じく，消去する因子が，左辺と右辺で前後異なっている．

｛(BA:AΔ)(ΓZ:ZE)
=(BΓ:KN)(KN:KM)(KM:ΔE).｝ ｛6'｝
[BA:AΔ =NK:KM]を共通に消去する． 7
すると，
ΓZ:ZE=(BΓ:KN)(KM:ΔE). 10
**（集成第 7 巻補助命題 198）**

｛6'｝のように左辺は 2 因子の比の合成，右辺は 3 因子の比の合成となっている．両辺から消去すべ

き共通の同じ因子 BA:AΔ　=NK:KM は，左辺では前の因子，右辺では中央の因子となっている．

ここでも，この困難さを見越して，そもそも比の合成の順が逆になるように，論理の構成を組み替えることができなかったのかという疑問に突き当たる．

そこで，ここでも，それを検討するために直前の論証過程を取り上げる．

r(AZ,BΓ):r(AB,ΓZ)
=r(AZ,ΔE):r(AΔ,EZ),　1
交換比をとって,
[r(AZ,BΓ):r(AZ,ΔE) =BΓ:ΔE,]　[3]
=r(AB,ΓZ):r(AΔ,EZ).　2
BΓ:ΔE
=(BΓ:KN)(KN:KM)(KM:ΔE).　5
ところが,
r(AB,ΓZ):r(AΔ,EZ)
=(BA:AΔ)(ΓZ:ZE)　6
よって,
{(BA:AΔ)(ΓZ:ZE)
=(BΓ:KN)(KN:KM)(KM:ΔE).}　{6'}
[BA:AΔ　=NK:KM]を共通に消去する．　[7]
すると,
ΓZ:ZE
=([BΓ:KN =ΘΓ:KΘ,])　9
([KM:ΔE =KH:HE]).　10
よって,
{ΓZ:ZE =(ΘΓ:KΘ)(KH:HE)}　10'

論証の過程を見やすくするために｛ ｝の部分を補足した．

6'の左辺において BA:AΔを後の因子とするには，6 において BA:AΔを後の因子とすることだから，比の合成，複比における長方形の線分順の慣例により原理的に可能である．

これに対し，6'の右辺において，KN:KM の因子を中央から前あるいは後にすることは，5 の右辺において同様にすることになり，既に，「5　論証における比の合成の出現の仕方と合成の順」の「(4) 線分の比から比の合成へ」において検討したとおり，比の合成の交換可能性を認めない限り原理的に不可能である．補助命題 198 は比の合成の交換可能性をギリシャの数学者たちに迫るものとなっている．

## ８．まとめ　ギリシャ数学における比の合成の交換可能性，等順位の比，乱比例

数学集成第 7 巻において，比の合成の交換可能性を明示して用いた例はない．比の合成の気まぐれに変更するような推論も全くない．厳格に交換可能性を認めない姿勢で論理を進めている．

しかし，交換可能であることを自明のものとパッポスが考えていた痕跡がある．

第 1 に，「**7.3 共通に消去**」に挙げた 3 例のうち最後の例は，明確に交換可能性を前提としなければ，本質的に成立しない推論であることによる．

第 2 に，「**7.3 共通に消去**」の 3 例のうち 2 番目に取り上げた例は，そこで示したように交換可能性を回避しうるものであるにもかかわらず，パッポスはその対応をしなかったことによる．

第 3 に，パッポスが取り上げた補助命題のうちのいくつかと「**比，長方形，複比，比の合成の表記の法則性，慣例**」により，交換可能性が容易に論証しうることによる．

最後に挙げた点は，以下のような次第である．

すなわち，「2 パッポスの数学集成第 7 巻における等順位の比，乱比例と比の合成」「 (3) 比，長方形，複比，比の合成の表記」において記した「比の合成，複比における長方形の線分順の慣例」，すなわち，「論証の進行に合わせて都合の良いように長方形の線分の順序をとっている」ことによる．

たとえば，補助命題 75 の 7 に
(ΓE:EΔ)(ΓB:BΔ)
=r(BΓ,ΓE):r(BΔ,ΔE).　7
**（集成第 7 巻補助命題 75）**
という表現がある．

一方，補助命題 210 の 3 には
r(EH,ZΔ):r(ΔE,HZ)
=(HE:EΔ) (ΔZ:ZH) ,　3
**（集成第 7 巻補助命題 210）**
という表現がある．

よって，上の補助命題 75 の 7 について
(ΓE:EΔ)(ΓB:BΔ) =r(BΓ,ΓE):r(BΔ,ΔE)
=(ΓB:BΔ)(ΓE:EΔ)
と変形するのも可能であると考えられていたと判断できるからである．この論理は、**2.6 比の合成**の末尾で紹介した、筆者の「ユークリッド原論における乱比例と比の合成(積)の可換性」の結論に他ならない。

一方，等順位の比においては上記の便法を用いることはできないから，乱比例における等順位の比により正面から議論を進めている．

どうやら，比の理論は，比の合成の概念によらずに構成されていて，その流れの上に等順位の比があるので，比の合成を用いて論じることは正統でないとみなされていたのではないだろうか．数学集成第7巻が同一の補助命題を比の合成を用いる場合と用いない場合をわざわざ明示して，重複して証明していることが，このことを物語っている．

パッポスの数学集成第7巻の分析から、パッポスは暗黙の裡に比の合成の可換性を認めていたと判断できる．対象とする文献を広げて，比の合成における可換性を明示的に表現されたのはどの時代の誰かをさらに追求してゆきたい．

## 参考文献


1） Euclides, *Euclid's Elements of Geometry,* The Greek text of J.L. Heiberg(1883-1885), edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick, 2008.

2） 斎藤憲，「『原論』解説（I~VI 巻）」, 斎藤憲・三浦伸夫編『エウクレイデス全集』第1巻, p.161, 東京大学出版会，2008.

3) I, Muller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Dover Publications,Inc., p135. 2006.

4) 北秀和，「ユークリッド原論における乱比例と比の合成（積）の可換性」，『大阪工業大学紀要』人文篇（57），pp. 73−85，2013.

5） Pappus of Alexandria，*Book 7 of the Collection* edited with Translation and Commentary by Alexander , Jones，Springer-Verlag, 1986.

6) 高橋憲一，「中世西欧の比例論―伝承と展開―」，伊東俊太郎編『中世の数学』，共立出版, 1987.

7) M，S，Mahoney， Mathematics, *Science in the Middle Ages*， pp.162-169， The University of Chicago Press，1978.

8) R. Descartes，*La Geometrie*, 1637.

9) Pappus of Alexandria，op.cit., p.8.

10) R. Descartes, op.cit., p.16.

11) Euclides, op.cit..

12) エウクレイデス，「『原論』I~VI巻」, 斎藤憲・三浦伸夫編『エウクレイデス全集』第1巻，東京大学出版会，2008.

13) ユークリッド，『ユークリッド原論』，中村幸四郎，寺坂英孝，伊東俊太郎，池田美恵訳・解説，共立出版，1971.

14) Pappus of Alexandria, op.cit.

15) Euclid, *The Thirteen Books Of Euclid's Elements* Translated with introduction and commentary by Sir Thoms L. Heath, Vol.1, p.370, Dover, 1956.

16) エウクレイデス，前掲書，p.410.

17) 北秀和，前掲書，p.83.

18) Pappus of Alexandria, op.cit, p.147.

19) Ibid. ,p.279.

20）エウクレイデス，前掲書，p.449.

21) Pappus of Alexandria，op.cit,p.261.

22) Ibid. ,p.147.

附表 1:　該当補助命題一覧

（単位:箇所）

| 補助命題 | 等順位の比 | 乱比例 | 比の合成 | 比表記(*1) | | 長方形表記(*2) | | 比の合成＝長方形(*3) | | | | 複比(*4) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 内側 | 他 | 内側 | 他 | 前後一致 | 前一致 | 後一致 | 不一致 | 前前前前 | 前前前後 | 前後前前 | 前後前後 | 前前後後 |
| Lemmas to the Determinate Section | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 68 | | | ○ | 15 | 1 | 12 | | | 1 | | | | | | | |
| 74 | | | ○ | 6 | | 6 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 75 | | | ○ | 4 | | 9 | | | 1 | | 1 | | | | | |
| 77 | | | ○ | 12 | | 8 | | 1 | | | | | | | | |
| 84 | | | ○ | 10 | | 6 | | 1 | | | | | | | | |
| 86 | | | ○ | 9 | | 8 | | | 1 | | | | | | | |
| Lemmas to Porisms　1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 194 | | | ○ | 20 | | | | | | | | | | | | |
| 196 | ○ | | | 9 | 4 | | | | | | | 3 | 2 | 1 | 2 | |
| 197 | | | ○ | 4 | 5 | | | | 1 | | | 2 | 2 | 4 | 2 | |
| 198 | | | ○ | 9 | 2 | | | 1 | | | | | | 4 | | |
| 210 | | | ○ | 10 | 4 | | | 2 | | | | 3 | | | | 3 |
| 212 | ○ | | ○ | 7 | 2 | 8 | | | | | 1 | | 1 | | 1 | |
| Lemmas to　conics　1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 238 | ○ | | | 1 | | 4 | | | | | | | | | | |
| 240 | | | ○ | | | | | | | | | | | | | |
| 245 | | ○ | | 15 | 1 | 12 | | | | | | | | | | |
| 246 | | | ○ | 10 | | 2 | | 1 | | 1 | | | | | | |
| Lemmas to conics　2 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 253 | | | ○ | 8 | | 6 | | 2 | | | | | | | | |
| 255 | | | ○ | 4 | | 4 | | | | | | | | | | |
| 256 | ○ | | | 12 | | 8 | | | | | | | | | | |
| Lemmas to conics　3 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 272 | ○ | | ○ | 3 | 1 | 14 | | | | | | | | | | |
| Lemmas to conics　6 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 284 | ○ | | | 10 | | 6 | | | | | | | | | | |
| 285 | | | ○ | 4 | | 2 | | | | | | | | | | |
| 290 | ○ | | | 8 | | 6 | | | | | | | | | | |
| 292 | ○ | | | 17 | 1 | 2 | | | | | | | | | | |
| 293 | ○ | | | 2 | | 8 | | | | | | | | | | |
| 296 | | ○ | | 10 | | 0 | | | | | | | | | | |
| Lemmas to conics　7,8 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 304 | ○ | | | 18 | | 14 | | | | | | | | | | |
| 306 | ○ | | | 6 | | 12 | | | | | | | | | | |
| 309 | ○ | | | 12 | | 0 | | | | | | | | | | |
| Lemmas to Loci on Surfaces | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 317 | | | ○ | 19 | | 12 | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 合　計 | 12 | 2 | 18 | 274 | 21 | 169 | 2 | 9 | 4 | 1 | 2 | 8 | 5 | 9 | 5 | 3 |

(*1)　比表記の内側とは，ＢΔ:ΔΓのように，前後の項の共通点が内側に表記されたもの．

(*2)　長方形表記の内側とは，r(ABΓ)，r(AB,BΓ)のように，辺の共通点が内側に表記されたもの．

(*3)　比の合成＝長方形の前後一致とは，(AB:ΓE)(BΓ:AE)=r(ABΓ):r(ΓEA)のように，比の前項が前辺に，後項が後辺に表記されたもの．（他も同様．）

(*4)　複比の前後/前前とは，r(EΘ,ZH):r(EZ,HΘ)のように，各項の第１辺，第２辺の共通点Ｅ，Ｈが，第１項ではＥ前・Ｈ後，第２項ではＥ前・Ｈ前に表記されたもの．（他も同様．）

附表 2: 等順位の比，乱比例，比の合成等の該当箇所

| | |
|---|---|
| 凡例 （該当節） | |
| 補助命題-箇所番号 | |
| コメント | |
| 箇所番号 | 前提 |
| 箇所番号 | -->結果 |
| 箇所番号 | >>>その後の進展 |

| | |
|---|---|
| 乱比例での等順位の比（ex aequali in disturbed proportion）(3.4 節) | |
| 245-(10'.11>12) | |
| | |
| 10 | AH:HB =ΘZ:ZA |
| 11 | BH:HK =ΛZ:ZΘ |
| 12 | -->(ΘZ:ZA)(ΛZ:ZΘ) |
| 296-(3.3'>4) | |
| | |
| 3 | BH:HΓ =EΘ:ΘZ |
| 3' | ΓH:HK =ΔΘ:ΘE |
| 4 | -->BH:HK =ΔΘ:ΘZ |

| | |
|---|---|
| 共通に付加（applied in common）(4 節) | |
| 212-(1.[1'.2]>[2'.3]) | |
| 同じ比を後ろに付加し，左辺は等順位の比，右辺は合成として処理. | |
| 1 | α(EB):r(EΓB) =BH:HΓ |
| [1'.2] | ΓE:EB =r(EΓB):r(EBΓ) |
| [2'.3] | -->α(EB):r(EBΓ)=(BH:HΓ)(r(EΓB):r(EBΓ)) |

| | |
|---|---|
| 等順位の比（ex aequali）(5 節) | |
| 196-(3.5>6) | |
| | |
| 3 | EZ:ZA =EΘ: ΘΛ |
| 5 | AZ:ZH =ΘΛ: ΘM |
| 6 | -->EZ:ZH =EΘ: ΘM |
| 212-(1.[1'.2]>[2'.3]) (再掲) | |
| 同じ比を後ろに付加し，左辺は等順位の比，右辺は合成として処理. | |
| 1 | α(EB):r(EΓB) =BH:HΓ |
| [1'.2] | ΓE:EB =r(EΓB):r(EBΓ) |
| [2'.3] | -->α(EB):r(EBΓ)=(BH:HΓ)(r(EΓB):r(EBΓ)) |
| 238-(4.5>6) | |
| | |
| 4 | r(AB.ZE):α(ZE) =r(AHZ):α(HZ) |
| 5 | α(ZE):α(ΓΔ) =α(ZH):α(HΓ) |
| 6 | -->r(AB.ZE):α(ZΔ) =r(AHZ):α(HΓ) |
| 256-(6.7>8) | |
| not by means of compounded(ratio) | |
| 最初の式の逆比を取らずそのまま等順位の比. | |
| 6 | BΓ: ΓK =EZ:ZΛ |
| 7 | BΓ: ΓA =EZ:ZΔ |
| 8 | -->KΓ: ΓA =ΛZ:ZΔ |
| 272-(2.3>4) | |
| not using compound ratio | |
| 2 | r(AEB):α(EB) =r(ΔEΓ):α(EΓ) |
| 3 | α(EB):α(BZ) =α(EΓ):α(ΓH) |
| 4 | -->r(AEB):α(ZB) =r(ΓEΔ):α(ΓH) |
| | |

| | |
|---|---|
| 272-(4.5>6) | |
| 272-4 の結果に続いている. | |
| 4 | r(AEB):α(ZB) =r(ΓEΔ):α(ΓH) |
| 5 | α(ZB):r(BZA) =α(ΓH):r(ΓHΔ) |
| 6 | -->r(AEB):r(AZB) =r(ΓEΔ):r(ΓHΔ) |
| 284-(13.14>15) | |
| 最初の式の逆比を取らずそのまま等順位の比. | |
| 13 | ΞA:AΓ =OΔ:ΔZ |
| 14 | ΞA:AM =OΔ:ΔN |
| 15 | -->ΓA:AM =ZΔ:ΔN |
| 290-(21.24>25) | |
| | |
| 21 | BΞ:ΞH =EO:OΘ |
| 24 | HΞ:ΞK =ΘO:OΛ |
| 25 | -->BΞ:ΞK =EO:OΛ |
| 292-([9'.11].12>13) | |
| 最初の式の逆比を取らずそのまま等順位の比. | |
| なお．結果の左辺ではOMとせず．右辺ではＰN | |
| [9'.11] | AM:MO =ΔN:NＰ |
| 12 | AM:MΣ =ΔN:NT |
| 13 | -->MO:MΣ =ＰN:NT |
| 293-(6.7>8) | |
| 後の式を先に見立てて等順位の比 | |
| 6 | α(AH):α(HK) =α(ΔΘ):α(ΘΛ) |
| 7 | r(BHΓ):α(AH) =r(EΘZ):α(ΔΘ) |
| 8 | -->r(BHΓ):α(HK) =r(EΘZ):α(ΘΛ) |
| 304-(3.4>5) | |
| ″ex aequali″の明示なく，最初の式の逆比をとらず，そのまま処理 | |
| 3 | α(BA):α(AH) =α(ΔE):α(ΔΘ) |
| 4 | α(AB):r(ABH) =α(ΔE):r(ΔEΘ) |
| 5 | -->α(AH):r(ABH) =α(ΔΘ):r(ΔEΘ) |
| 304-(8.9>10) | |
| | |
| 8 | ΓA:AB =ZΔ:ΔE |
| 9 | BA:AH =EΔ:ΔΘ |
| 10 | -->ΓA:AH =ZΔ:ΔΘ |
| 304-({{12}}.13>14) | |
| 面積比における等順位の比 | |
| {{ギリシャ語原典には式相当の表記なし}} | |
| {{12}} | {{r(ΓHA):α(AH) =r(ZΘΔ):α(ΘΔ)}} |
| 13 | α(AH):r(ABH) =α(ΔΘ):r(ΔEΘ) |
| 14 | -->r(ABH):r(AHΓ)=r(ΔEΘ):r(ΔΘZ) |
| 306-(1.2>{2'}) | |
| ″ex aequali″，結果の明示なく， 面積比まで処理してから示す. | |
| 1 | ΓB:BA =ZE:EΔ |
| 2 | ΓB:BH =ZE:EΘ |
| {2'} | --> {AB:BH =ΔE:EΘ} |
| 3 | >>>α(AH):r(AHB)=α(ΔΘ):r(ΔΘE) |
| 306-(2.{2''}>{3'}) | |
| ″ex aequali″，結果の明示なく，面積比まで処理してから示す. | |
| 2 | ΓB:BH =ZE:EΘ |
| {2''} | {AH:BH =ΔΘ:EΘ} |
| {3'} | --> {AH:BΓ =ΔΘ:EZ} |
| 4 | >>>α(AH):α(BΓ)=α(ΔΘ):α(EZ) |

| | |
|---|---|
| 306-(3.4.5>6) | |
| 各４量にわたる等順位の比 | |
| 面積比における等順位の比 | |
| 3 | α(AH):r(AHB) =α(ΔΘ):r(ΔΘE) |
| 4 | α(AH):α(BΓ) =α(ΔΘ):α(EZ) |
| 5 | α(BΓ):r(BΓH) =α(EZ):r(EZΘ) |
| 6 | -->r(AHB):r(BΓH) =r(ΔΘE):r(EZΘ) |
| 309-(3'.5>5' /｛｛4'｝｝.5>｛｛6'｝｝) | |
| 等順位の比をとり，大小を判断 | |
| ｛｛英訳，ギリシャ語原典とも式相当の表記なし｝｝ | |
| 3'/｛｛4'｝｝ | HA:AB >ΘΔ:ΔE /｛｛<ΘΔ:ΔE｝｝ |
| 5 | AB:BΓ =ΔE:EZ |
| 5'/｛｛6'｝｝ | -->AH:BΓ >ΔΘ:EZ /｛｛<ΔΘ:EZ｝｝ |

| | |
|---|---|
| 比の合成＝比の合成(6.2 節) | |
| 68-(7.8>9) | |
| ２式から合成 | |
| 7 | AB:ΓE =BΔ:ΔΓ. |
| 8 | BΓ:EA =ΓΔ:ΔE |
| 9 | --> (AB:ΓE)(BΓ:AE) =(BΔ:ΔΓ)(ΓΔ:EΔ) |
| 74- (4.5>6) | |
| ２式から合成 | |
| 4 | AΓ:ZE =ΓB:BE. |
| 5 | ΓA:HE =ΓΔ:ΔE |
| 6 | --> (ΓA:ZE)(ΓA:HE) =(ΓB:BE)(ΓΔ:ΔE) |
| 77- (4.4'>5) | |
| ２式から合成 | |
| 4 | BE:AΓ =EΔ:ΔΓ. |
| 4' | BΔ:ΔE =AB:ΓE |
| 5 | --> (BΔ:ΔE)(EΔ:ΔΓ) =(AB:ΓE)(EB:AΓ) |
| 86- (2.4>5) | |
| ２式から合成 | |
| 2 | AΓ:ΔE =ΓB:BE. |
| 4 | BE:BΔ =ΓE:ΔA |
| 5 | --> (ΓB:BE)(EB:BΔ) =(AΓ:ΔE)(EΓ:ΔA) |
| 194-(3.4.5>6) | |
| ２つの線比=合成比を線比=線比に代入 | |
| 3 | AΔ:ΔZ =AΓ:ΓH. |
| 4 | AΔ:ΔZ =(AB:BE)(EK:KZ). |
| 5 | AΓ:ΓH =(AB:BE)(EΘ:ΘH) |
| 6 | --> (AB:BE)(EK:KZ) =(AB:BE)(EΘ:ΘH) |
| | >>>removed in common へ |
| 210-(4.5>[4.5]) | |
| ２式から合成 | |
| 4 | HE:EΔ =KH:BΔ. |
| 5 | ΔZ:ZH =ΔΓ:HΛ |
| [4.5] | -->(HE:EΔ)(ΔZ:ZH) =(KH:BΔ)(ΔΓ:HΛ) |
| 210-([4.5].3.2.6>7) | |
| ２つの面比＝合成比を１つの面比=面比に代入し，さらに１つの合成比＝合成比に代入 | |
| [4.5] | (HE:EΔ)(ΔZ:ZH) =(KH:BΔ)(ΔΓ:HΛ). |
| 3 | r(EH.ZΔ):r(ΔE.HZ) =(HE:EΔ)(ΔZ:ZH). |
| 2 | r(EH.ZΔ):r(ΔE.HZ) =r(BΘ.ΓΔ):r(BΔ.ΓΘ). |
| 6 | r(BΘ.ΓΔ):r(BΔ.ΓΘ)=(ΘB:BΔ)(ΔΓ:ΓΘ) |
| 7 | --> (KH:BΔ)(ΔΓ:HΛ)=(BΘ:BΔ)(ΔΓ:ΓΘ) |

| | |
|---|---|
| 210-(7.8>9) | |
| 比の合成=比の合成の１因子を合成に分解 | |
| 7 | (KH:BΔ)(ΔΓ:HΛ) =(BΘ:BΔ)(ΔΓ:ΓΘ). |
| 8 | KH:BΔ =(KH:BΘ)(BΘ:BΔ) |
| 9 | --> (KH:BΘ)(BΘ:BΔ)(ΔΓ:HΛ) =(BΘ:BΔ)(ΔΓ:ΓΘ) |
| 246- (2.4>5) | |
| ２式から合成 | |
| 2 | AH:HB =ΘZ:ZA. |
| 4 | AH:HΓ =ΔZ:ZA |
| 5 | --> (AH:HB)(AH:HΓ) =(ΘZ:ZA)(ΔZ:ZA) |
| 255-(5.6>｛｛7’｝｝) | |
| ２式から合成，後の式を前因子に | |
| ｛｛英訳，ギリシャ語原典とも式相当の表記なし｝｝ | |
| 5 | HΓ:ΓA =ΘZ:ZΔ. |
| 6 | BΓ:ΓA =EZ:ZΔ |
| ｛｛7’｝｝ | --> ｛｛(BΓ:ΓA)(HΓ:ΓA) =(EZ:ZΔ)(ΘZ:ZΔ)｝｝ |
| 272-(1&.2&>｛｛3’&｝｝) | |
| ２式から合成 | |
| ｛｛英訳，ギリシャ語原典とも式相当の表記なし｝｝ | |
| 1& | AE:EΔ =AZ:HΔ. |
| 2& | BE:EΓ =ZB:HΓ |
| 3’& | --> ｛｛(AE:EΔ)(BE:EΓ) =(AZ:HΔ)(ZB:HΓ)｝｝ |
| 285- (1&.2&>3’&) | |
| ２式から合成 | |
| ｛｛英訳，ギリシャ語原典とも式相当の表記なし｝｝ | |
| 1& | BA:AΓ =EΔ:ΔZ. |
| 2& | HA:AΓ =ΘΔ:ΔZ |
| 3’& | --> ｛｛(BA:AΓ)(HA:AΓ) =(EΔ:ΔZ)(ΘΔ:ΔZ)｝｝ |

| | |
|---|---|
| 面積の比＝比の合成(6.3 節) | |
| 75-6 | |
| 合成定義逆用・後逆順 | |
| 6 | α(AΓ):r(ZΔH) =(ΓA:ΔH)(ΓA:ZΔ) |
| 197-1 | |
| 合成定義逆用・後逆順 | |
| 1 | r(ΘE.HZ):r(ΘH.ZE) =(ΘE:EZ)(ZH:HΘ) |
| 197-4 | |
| 推論途上（代入） | |
| 4 | r(ΘE.HZ):r(ΘH.EZ) =(ΘΛ:ZA)(ZA:ΘK) |
| 198-6 | |
| 合成定義逆用 | |
| 6 | r(AB.ΓZ):r(AΔ.EZ) =(BA:AΔ)(ΓZ:ZE) |
| 210-3 | |
| 合成定義逆用 | |
| 3 | r(EH.ZΔ):r(ΔE.HZ) =(HE:EΔ)(ΔZ:ZH) |
| 210-6 | |
| 合成定義逆用 | |
| 6 | r(BΘ.ΓΔ):r(BΔ.ΓΘ) =(ΘB:BΔ)(ΔΓ:ΓΘ) |
| 212-3 | |
| 推論途上（代入） | |
| 3 | α(EB):r(EBΓ) =(BH:HΓ)(r(EΓB):r(EBΓ)) |
| 212-5 | |
| 推論途上（代入） | |
| 5 | α(EB):r(EBΓ) =(BH:HΓ)(EΓ:EB) |
| 253-2 | |
| 合成定義逆用 | |
| 2 | r(BΓH):α(ΓA) =(BΓ:ΓA)(HΓ:ΓA) |

| | |
|---|---|
| 253-3 | |
| 合成定義逆用 | |
| 3 | r(EZΘ):q(ZΔ) =(EZ:ZΔ)(ΘZ:ZΔ) |
| 317-7 | |
| 推論途上(代入) | |
| 7 | r(ΘΔH):r(ZAE) =(TΣ:ΣY)(TΣ:ΣP) |
| 317-8 | |
| 仮定 | |
| 8 | r(ΘΔH):q(ΔΓ) =(TΣ:ΣY)(TΣ:ΣP)(q(PT):q(TΣ)) |
| 317-9 | |
| 合成定義逆用 | |
| 9 | r(ΘΔH):q(ΔΓ) =(r(ΘΔH):r(ZAE))(r(ZAE):q(ΔΓ)) |
| 317-10 | |
| 推論途上 | |
| 10 | r(ΘΔH):r(ZAE) =(TΣ:ΣY)(TΣ:ΣP) |

| 線分の比＝比の合成(6.4 節) | |
|---|---|
| 194-4 | |
| 命題(メネラオスの定理) | |
| 4 | AΔ:ΔZ =(AB:BE)(EK:KZ) |
| 194-5 | |
| 命題(メネラオスの定理) | |
| 5 | AΓ:ΓH =(AB:BE)(EΘ:ΘH) |
| 198-5 | |
| 合成の定義の逆用 | |
| 5 | BΓ:ΔE =(BΓ:KN)(KN:KM)(KM:ΔE) |
| 198-9 | |
| removed in common の結果 | |
| 9 | ΓZ:ZE =(BΓ:KN)(KM:ΔE) |
| 210-8 | |
| 合成の定義の逆用 | |
| 8 | KH:BΔ =(KH:BΘ)(BΘ:BΔ) |
| 210-11 | |
| 合成の定義の逆用 | |
| 11 | ΔΓ:ΓΘ =(ΔΓ:HΛ)(HΛ:ΘΓ) |
| 240-2 | |
| 仮定 | |
| 2 | A:B =(Γ:Δ)(E:Z) |
| 240-8 | |
| 結論 | |
| 8 | Γ:Δ=(A:B)(Z:E) |

| 比の合成=線分の比(7.1 節) | |
|---|---|
| 68-11 | |
| 合成の定義 | |
| 11 | (BΔ:ΔΓ)(ΓΔ:ΔE) =BΔ:ΔE |
| 77-6 | |
| 合成の定義 | |
| 6 | (BΔ:ΔE)(EΔ:ΔΓ) =BΔ:ΔΓ |
| 84-6 | |
| 合成の定義 | |
| 6 | (AB:BΓ)(ΓB:BE) =AB:BE |
| 86-4’ | |
| 合成の定義 | |
| 4’ | (ΓB:BE)(EB:BΔ) =ΓB:BΔ |

| | | |
|---|---|---|
| 197-5 | | |
| | 合成の定義 | |
| | 5 | (ΘΛ:ZA)(ZA:ΘK) =ΘΛ:ΘK |
| 198-13 | | |
| | 合成の定義 | |
| | 13 | (ΓΘ:ΘK)(ΘK:EΞ) =ΓΘ:EΞ |
| 210-10 | | |
| | removed in common の結果 | |
| | 10 | (KH:BΘ)(ΔΓ:HΛ) =ΔΓ:ΓΘ |
| 240-4 | | |
| | 合成の定義 | |
| | 4 | (Γ:Δ)(Δ:H) =Γ:H |

| | | |
|---|---|---|
| 比の合成=面積の比(7.2 節) | | |
| 68-10 | | |
| | 後項逆順 | |
| | 10 | (AB:ΓE)(BΓ:AE) =r(ABΓ):r(AEΓ) |
| 74-7 | | |
| | | |
| | 7 | (ΓA:ZE)(ΓA:HE) =q(ΓA):r(ZE,HE) |
| 74-9 | | |
| | | |
| | 9 | (ΓB:BE)(ΓΔ:ΔE) =r(BΓ,ΓΔ):r(BE,ΔE) |
| 75-7 | | |
| | 逆順 | |
| | 7 | (ΓE:EΔ)(ΓB:BΔ) =r(BΓE):r(BΔE) |
| 77-7 | | |
| | | |
| | 7 | (AB:ΓE)(EB:AΓ) =r(ABE):r(EΓA) |
| 84-7 | | |
| | | |
| | 7 | (AΔ:ΓE)(AΓ:ΔE)=r(ΔAΓ):r(ΓEΔ) |
| 86-5' | | |
| | 後項逆順 | |
| | 5 | (AΓ:ΔE)(EΓ:ΔA) =r(AΓE):r(AΔE) |
| 212-6 | | |
| | 逆順 | |
| | 6 | (BH:HΓ)(EΓ:EB) =r(EΓ,BH):r(EB,ΓH) |
| 246-4' | | |
| | | |
| | 4' | (AH:HB)(AH:HΓ) =q(AH):r(BHΓ) |
| 246-6 | | |
| | 前項逆順 | |
| | 6 | (ΘZ:ZA)(ΔZ:ZA) =r(ΔZΘ):q(ZA) |

| | | |
|---|---|---|
| 共通に消去 (removed in common) (7.3 節) | | |
| 194-(6>7) | | |
| | 2 因子＝2 因子，同一因子(前と前) | |
| | 6 | (AB:BE)(EK:KZ) =(AB:BE)(EΘ:ΘH) |
| | 7 | --> EK:KZ =EΘ:ΘH |
| 198-({6'},[6'',7]>10) | | |
| | 3 因子＝2 因子，同じ因子(中と前) | |
| | {英訳，ギリシャ語原典に式相当の表記なし} | |
| | be removed in common の記載あり | |
| | {6'} | {(BA:AΔ)(ΓZ:ZE) =(BΓ:KN)(KN:KM)(KM:ΔE)} |
| | [6'',7] | <<BA:AΔ =NK:KM |
| | 10 | --> ΓZ:ZE =(BΓ:KN)(KM:ΔE) |

| | |
|---|---|
| 210-(9>10) | |
| 3因子＝2因子，同一因子(中と前) | |
| 9 | (KH:BΘ)(BΘ:BΔ)(ΔΓ:HΛ) =(BΘ:BΔ)(ΔΓ:ΓΘ) |
| 10 | --> (KH:BΘ)(ΔΓ:HΛ) =ΔΓ:ΓΘ |
| 210-(11>12) | |
| 2因子＝2因子，同一因子(後と前) | |
| 11 | (KH:BΘ)(ΔΓ:HΛ) =(ΔΓ:HΛ)(HΛ:ΘΓ) |
| 12 | --> KH:BΘ =HΛ:ΘΓ |
| 253-({3'},[4.4']>5) | |
| 2因子＝2因子，同じ因子(前と前) | |
| {英訳，ギリシャ語原典に式相当の表記なし} | |
| the remaining ratio の記載あり | |
| {3'} | {(BΓ:ΓA)(HΓ:ΓA) =(EZ:ZΔ)(ΘZ:ZΔ)} |
| [4.4'] | <<(BΓ:ΓA) =(EZ:ZΔ) |
| 5 | --> HΓ:ΓA =ΘZ:ZΔ |
| 317-({10'}>11) | |
| 3因子＝3因子，同一2因子（前と前) | |
| {英訳，ギリシャ語原典に式相当の表記なし} | |
| the remaining ratio の記載あり | |
| {10'} | {(TΣ:ΣY)(TΣ:ΣP)(α(PT):α(TΣ)) |
| | =(TΣ:ΣY)(TΣ:ΣP)(r(ZA.AE):α(ΔΓ))} |
| 11 | --> r(ZA.AE):α(ΔΓ) =α(PT):α(TΣ) |